Tema 3

Representación de Fourier: señales periódicas

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (I)

- Representar la señal $x[n]$, periódica de periodo N, como suma ponderada de exponenciales complejas

$$\hat{x}[n] = \sum_{k} A[k] e^{j\Omega_k n} = \sum_{k} A[k] e^{jk\Omega_0 n}; \ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- ¿Cuántos términos se usarán en la representación?

  – Exponencial compleja: N periódica a frecuencia $k \Rightarrow N$ exponenciales complejas distintas

$$e^{j(k+N)\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n} e^{jN\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}; \ \ N\Omega_0 = 2\pi$$

luego

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n}; \ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (II)

- Para ver la bondad de la aproximación analizaremos el error cuadrático medio (MSE) entre la señal y su representación mediante series

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n] - \hat{x}[n]|^2$$

- Ortogonalidad exponenciales complejas:

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (III)

Representamos la señal periódica $x[n]$ mediante la serie

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n}; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

¿Cuánto valen los coeficientes $A[k]$ que minimizan el error cuadrático medio en la aproximación?

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n] - \hat{x}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left| x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n} \right|^2$$

Expandimos el módulo al cuadrado

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left(x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_0 n} \right) \left(x[n] - \sum_{m=\langle N \rangle} A[m] e^{jm\Omega_0 n} \right)^*$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (IV)

Operando

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]x^*[n] -$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\sum_{m=\langle N\rangle} A^*[m]e^{-jm\Omega_0 n} -$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x^*[n]\sum_{k=\langle N\rangle} A[k]e^{jk\Omega_0 n} +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} A[k]e^{jk\Omega_0 n}\sum_{m=\langle N\rangle} A^*[m]e^{-jm\Omega_0 n}$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (V)

Reordenamos la expresión anterior para expresar el MSE como

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 -$$

$$-\sum_{m=\langle N\rangle} A^*[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jm\Omega_0 n}\right) -$$

$$-\sum_{k=\langle N\rangle} A[k]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x^*[n]e^{jk\Omega_0 n}\right) +$$

$$+\sum_{k=\langle N\rangle}\sum_{m=\langle N\rangle} A[k]A^*[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-m)\Omega_0 n}\right)$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (VI)

- Definimos

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

y aplicamos la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas,

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} A^*[k] X[k] -$$

$$- \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] X^*[k] + \sum_{k=\langle N \rangle} |A[k]|^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 + \sum_{k=\langle N \rangle} \left(|A[k]|^2 - A[k] X^*[k] - A^*[k] X[k] \right)$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (VII)

Sumando y restando $\sum_{k=\langle N\rangle}|X[k]|^2$

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 +$$

$$+\sum_{k=\langle N\rangle}\left(|A[k]|^2 - A[k]X^*[k] - A^*[k]X[k] + X[k]^2\right) - \sum_{k=\langle N\rangle}|X[k]|^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 + \sum_{k=\langle N\rangle}(A[k]-X[k])(A[k]-X[k])^* - \sum_{k=\langle N\rangle}|X[k]|^2$$

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 + \sum_{k=\langle N\rangle}|A[k]-X[k]|^2 - \sum_{k=\langle N\rangle}|X[k]|^2$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (VIII)

- El error se minimiza si

$$\sum_{k=\langle N\rangle} |A[k]-X[k]|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A[k]=X[k]$$

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 - \sum_{k=\langle N\rangle} |X[k]|^2$$

Analizamos $\sum_{k=\langle N\rangle} |X[k]|^2$:

$$\sum_{k=\langle N\rangle} |X[k]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k]X^*[k] =$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} \left(\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{m=\langle N\rangle} x[m]e^{-jk\Omega_0 m}\right)^*$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (IX)

reorganizando

$$\sum_{k=\langle N\rangle} |X[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{m=\langle N\rangle} x[n]x^*[m] \left(\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N\rangle} e^{jk\Omega_0(m-n)} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2$$

y sustituyendo en la ecuación del MSE

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 - \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = 0$$

$$MSE = 0, \forall n \quad \Longrightarrow \quad x[n] = \hat{x}[n]$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (X)

- Representación mediante serie de Fourier:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS;\,\Omega_0} X[k] \qquad \begin{cases} x[n] = \displaystyle\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]e^{jk\Omega_0 n} \\ X[k] = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \end{cases}$$

- $X[k]$ son periódicos de periodo N

$$X[k+N] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j(k+N)\Omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}e^{-jN\Omega_0 n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}e^{-j2\pi n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = X[k]$$

Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (XI)

DOMINIO DEL TIEMPO	SEÑAL PERIÓDICA	SEÑAL APERIÓDICA	
SEÑAL CONTINUA	***Series de Fourier (FS)***	***Transformada de Fourier (FT)***	SEÑAL APERIÓDICA
SEÑAL DISCRETA	***Series de Fourier (DTFS)*** $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k]e^{jk\,\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\,\Omega_0 n}$ $x[n], X[k]\ periodo\ (N), \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	***Transformada de Fourier (DTFT)***	SEÑAL PERIÓDICA
	SEÑAL DISCRETA	SEÑAL CONTINUA	**DOMINIO DE LA FRECUENCIA**

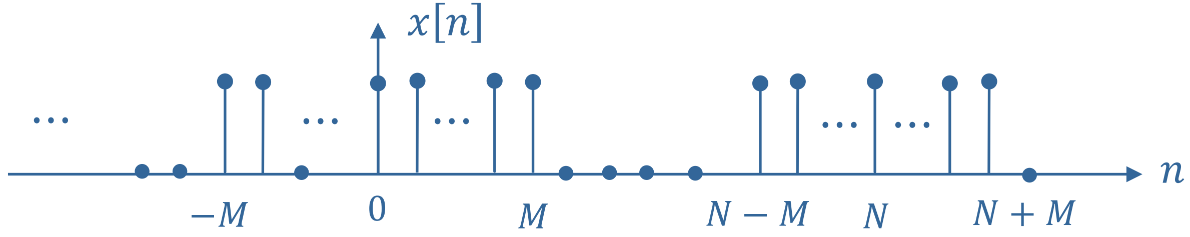
Series de Fourier: Señales discretas en el tiempo-DTFS (XII)

- Ejemplo 1: Encontrar la representación mediante series de Fourier de la señal

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \Phi\right)$$

- Ejemplo 2: Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier de la onda periódica cuadrada de periodo N representada a continuación:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & otro\ caso \end{cases}; \quad N \text{ periódica}$$



Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (I)

- Representamos una señal continua en el tiempo y periódica de periodo *T* mediante la serie

$$\hat{x}(t) = \sum_{k} A[k] e^{jk\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- ¿Cuántos términos contribuyen a la representación?
  - Exponenciales continuas $e^{jk\omega_0 t}$ son distintas para cada $k\omega_0$, luego se pueden encontrar infinitos términos distintos en la serie

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{jk\omega_0 t}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (II)

- Calcularemos el error cuadrático medio entre la señal y su representación mediante series para ver la bondad de la aproximación

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt$$

- Propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas:

$$\int_{\langle T\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (III)

Representamos la señal periódica $x(t)$ mediante la serie truncada

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-L}^{L} A[k]e^{jk\omega_0 t}$$

¿Cuánto valen los coeficientes $A[k]$ que minimizan el error cuadrático medio en la aproximación?

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} \left| x(t) - \sum_{k=-L}^{L} A[k]e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt$$

Expandimos el módulo al cuadrado

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} \left(x(t) - \sum_{k=-L}^{L} A[k]e^{jk\omega_0 t} \right) \left(x(t) - \sum_{m=-L}^{L} A[m]e^{jm\omega_0 t} \right)^* dt$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (IV)

Operando

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)x^*(t)dt$$

$$-\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\sum_{m=-L}^{L} A^*[m]e^{-jm\omega_0 t}\,dt -$$

$$-\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x^*(t)\sum_{k=-L}^{L} A[k]e^{jk\omega_0 t}dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} \sum_{k=-L}^{L}\sum_{m=-L}^{L} A[k]\,A^*[m]e^{j(k-m)\omega_0 t}dt =$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (V)

Reordenamos la expresión anterior para expresar el MSE como

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt -$$

$$-\sum_{m=-L}^{L} A^*[m]\left(\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jm\omega_0 t}\,dt\right) -$$

$$-\sum_{k=-L}^{L} A[k]\left(\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x^*(t)e^{jk\omega_0 t}\,dt\right) +$$

$$+\sum_{k=-L}^{L}\sum_{m=-L}^{L} A[k]\,A^*[m]\left(\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t}\,dt\right)$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (VI)

- Definimos

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

entonces,

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt -$$

$$-\sum_{m=-L}^{L} A^*[m]X[m] -$$

$$-\sum_{k=-L}^{L} A[k]X^*[k] +$$

$$+\sum_{k=-L}^{L}\sum_{m=-L}^{L} A[k]\,A^*[m]\left(\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 t}\,dt\right)$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (VII)

Aplicando la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas:

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-L}^{L} A^*[k]X[k] - \sum_{k=-L}^{L} A[k]X^*[k] + \sum_{k=-L}^{L} |A[k]|^2$$

Sumando y restando $\sum_{k=-L}^{L}|X[k]|^2$:

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt + \sum_{k=-L}^{L} |A[k] - X[k]|^2 - \sum_{k=-L}^{L} |X[k]|^2$$

El error se minimiza si

$$\sum_{k=-L}^{L} |A[k] - X[k]|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A[k] = X[k]$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (VIII)

Luego los coeficientes que minimizan el error cuadrático medio son los coeficientes de Fourier que hemos definido anteriormente

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$MSE = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-L}^{L} |X[k]|^2$$

- Si $L \longrightarrow \infty$, $\hat{x}(t) \longrightarrow x(t)$ y la representación mediante serie de Fourier:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_0} X[k] \quad \begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \\ X[k] = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{cases}$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (IX)

DOMINIO DEL TIEMPO	SEÑAL PERIÓDICA	SEÑAL APERIÓDICA	
SEÑAL CONTINUA	***Series de Fourier (FS)*** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\,\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\,\omega_0 t}\, dt$ $x(t)\ periódica\ (T);\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	***Transformada de Fourier (FT)***	SEÑAL APERIÓDICA
SEÑAL DISCRETA	***Series de Fourier (DTFS)*** $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k]e^{jk\,\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\,\Omega_0 n}$ $x[n], X[k]\ periodo\ (N), \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	***Transformada de Fourier (DTFT)***	SEÑAL PERIÓDICA
	SEÑAL DISCRETA	SEÑAL CONTINUA	**DOMINIO DE LA FRECUENCIA**

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (X)

- ¿Bajo que condiciones la serie infinita converge a $x(t)$?

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow x(t)$$

Si x(t) tiene potencia media finita en un periodo

$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$$

entonces, $MSE = 0$ (esto se cumple para muchas señales)

Que $MSE = 0$ no significa que $\hat{x}(t) = x(t)\ \forall t$, significa que la potencia media del error en la reconstrucción es nula

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (XI)

Condiciones de Dirichlet: garantizan la convergencia punto a punto para todos los valores de *t* si excepto para las discontinuidades

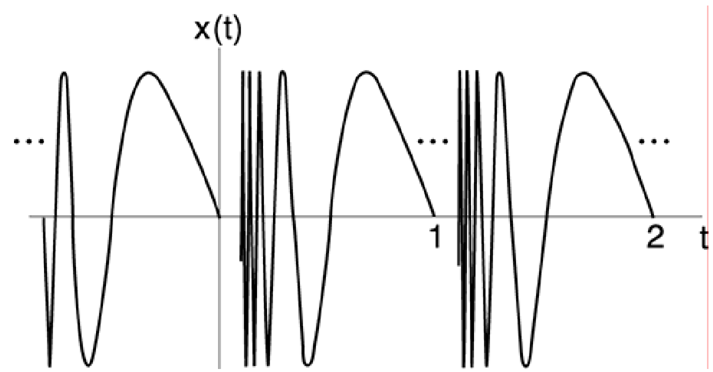
- **Condición 1:** $x(t)$ es integrable en valor absoluto (está acotada)

$$\int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- **Condición 2:** $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo (variación acotada)

  Ejemplo de señal que incumple la condición 2:

$$x(t) = sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$$

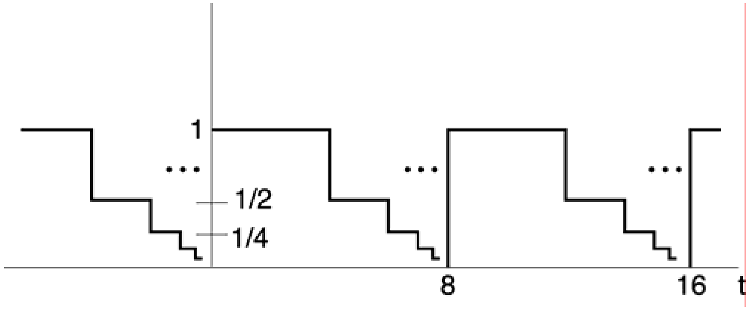


Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (XII)

- **Condición 3:** $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo

  Ejemplo de señal que incumple la condición 3:

  $T = 8$, infinitas discontinuidades



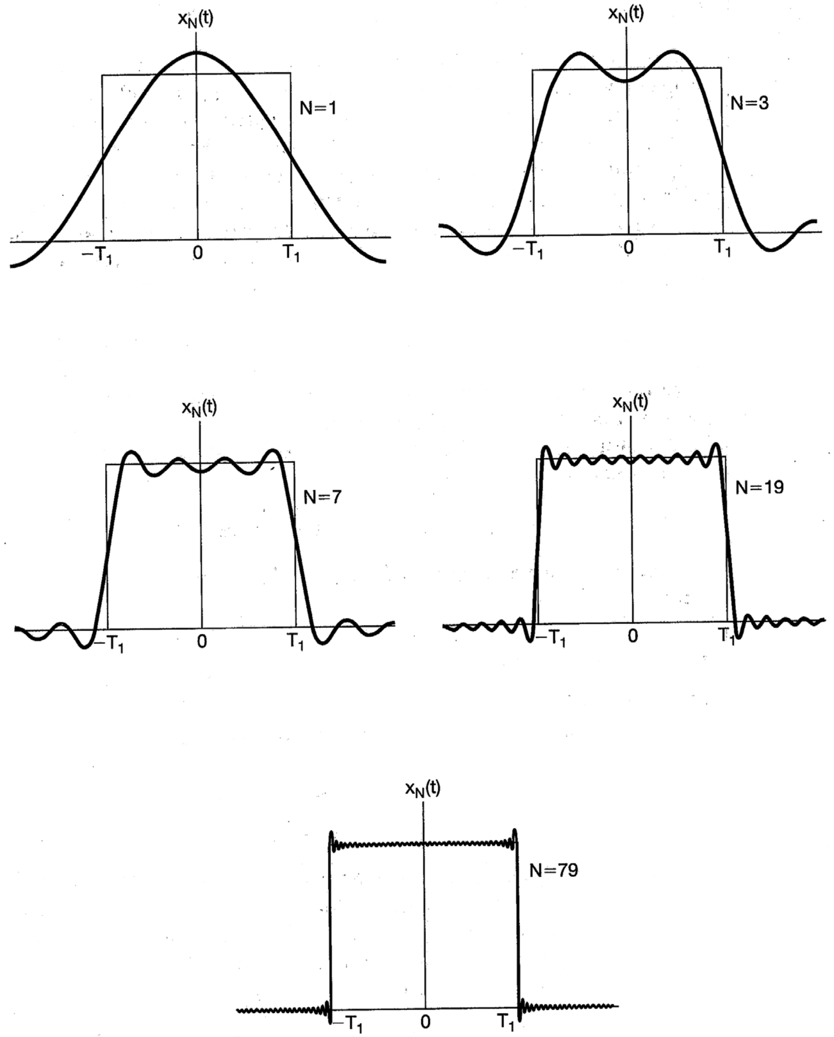
Si se satisfacen las condiciones de Dirichlet, entonces $\hat{x}(t) = x(t)\ \forall t$ excepto en las discontinuidades donde

$$\hat{x}(t) = \frac{x(t^{+}) + x(t^{-})}{2}$$

Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS(XIII)

- Fenómeno de Gibbs

$$x(t) = \sum_{k=-L}^{L} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$



Series de Fourier: Señales continuas en el tiempo-FS (XIV)

- Ejemplo 1: Encontrar la representación mediante series de Fourier de la señal

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Ejemplo 2: Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier de la onda periódica cuadrada de periodo T representada a continuación:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T_s \leq t \leq T_s \\ 0, & otro\ caso \end{cases}; \quad T \text{ periódica}$$